



ce
pre
UNI

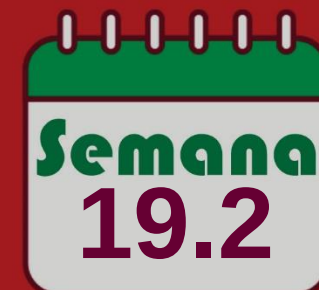
Álgebra

TEMA

SUMAS FINITAS y series

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



CONTENIDO

- **Suma finita . Propiedades. Propiedad telescópica.**
- **Demostración de algunas sumas finitas notables.**
- **Definición de Serie de números reales.**
- **Convergencia de series.**
- **Aritmética de las series**
- **Series Notables.**

Para $n \in \mathbb{N}$, la **suma finita** de $a_1, a_2, \dots, a_n$ es denotada por:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

También se denota $\sum_{k=1}^n a_k$

- Ejemplos.

$$\sum_{n=1}^{15} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$$

$$\sum_{n=1}^9 a_{nm} = a_{1m} + a_{2m} + \dots + a_{9m}$$

$$\sum_{n=1}^{15} na_n = a_1 + 2a_2 + \dots + 15a_{15}$$

Propiedades

$$1. \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

$$2. \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$$

$$3. \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \text{ (telescopia)}$$

$$4. \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=m}^{n+(m-1)} a_k$$

$$5. \sum_{k=1}^n a = na, a \in \mathbb{R}.$$

Sumas finitas.

Propiedades.

$$1. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

$$3. \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$$4. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$5. \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Algunas sumas finitas.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

- Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$,

$$1. \sum_{k=1}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$2. \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1 + x}$$

$$3. \sum_{k=1}^n kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \frac{x - x^{n+1}}{(1 - x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1 - x}$$

Algunas sumas finitas.

Propiedad.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

- Tenemos que $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Así,

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$$

- $\sum_{k=1}^n [(k+1)^2 - k^2] = \sum_{k=1}^n [2k + 1] = 2\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 2\sum_{k=1}^n k + n$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Algunas sumas finitas.

Propiedad.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Tenemos que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$. Así,
 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^n [3k^2 + 3k + 1]$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Algunas sumas finitas.

Propiedad 3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

Demostración : Tenemos que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} \right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \dots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule $\sum_{k=1}^n \frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

Tenemos que $\frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right]$.

Sea $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 261

Determine el valor de: $E = \sum_{n=1}^{20} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$



Ejercicio. Determine la suma de cifras de

$$\sum_{n=1}^{50} \left(\frac{\sum_{i=1}^n i^3}{\sum_{j=1}^n j^2} \right) \frac{(4n+2)}{n+1}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} \left(\frac{\sum_{i=1}^n i^3}{\sum_{j=1}^n j^2} \right) \frac{(4n+2)}{n+1} &= \sum_{n=1}^{50} \left(\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \right) \frac{(4n+2)}{n+1} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{50} \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(4n+2)}{n+1} = 3 \sum_{n=1}^{50} n \\ &= 3 \times \frac{50 \times 51}{2} = 3825 \end{aligned}$$

Ejercicio

Calcule

$$S = \sum_{k=1}^{32} \frac{\sqrt{7k+1} - \sqrt{7k-6}}{\sqrt{49k^2 - 35k - 6}}$$

Solución.

$$\sum_{k=1}^{32} \frac{\sqrt{7k+1} - \sqrt{7k-6}}{\sqrt{49k^2 - 35k - 6}} = \sum_{k=1}^{32} \frac{\sqrt{7k+1} - \sqrt{7k-6}}{\sqrt{7k+1}\sqrt{7k-6}} = \sum_{k=1}^{32} \left(\frac{1}{\sqrt{7k-6}} - \frac{1}{\sqrt{7k+1}} \right) ; a_k = \frac{1}{\sqrt{7k-6}}$$

$$= \sum_{k=1}^{32} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{33} = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15} \quad (\text{Suma Telescópica})$$

Ejercicio 266.

Determine el valor de $S(n) = \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^m 6n$

Series de números reales.

- Una **serie de números reales** es una sucesión de sumas parciales. Dada una sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, esta genera una sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Cuando esta sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $L \in \mathbb{R}$, decimos que la serie converge, y escribimos:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Notación:

Denotaremos a la serie $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad ; \quad \sum_{k \geq 1} a_k$$

Ejemplo: Determine el valor de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5}\right)^k = \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right) \left(\underbrace{1 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}_{1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}} \right)$$

$$s_n = \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) = \left(\frac{1}{4}\right)$$

Ejemplo.

Determine si la serie $\sum_{k=1}^n (-3)^k$ converge o diverge.

Solución

Tenemos que la sucesión de sumas parciales es dada por

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-3)^k = (-3) + 3 + (-3) + 3 + \dots + (-3)^n$$

$$s_n = \begin{cases} -3, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee dos subsucesiones que convergen a dos números reales diferentes. Por lo tanto, la serie $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Ejemplo.

Determine si la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} 4^k$ converge o diverge.

$$S_n = \sum_{k=1}^n 4^k = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = 4 \left(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4 \left(\frac{4^n - 1}{4 - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} (4^n - 1) = +\infty$$

Por lo tanto la serie diverge.

Ejemplo.

Determine la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(k+4)}$$

Resolución

Considerando las sumas parciales, y la propiedad telescópica para sumas finitas, tenemos que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo. Determine la suma de la siguiente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k^2+1}}{11^k}$$

Solución.

- Considerando las sumas parciales, tenemos que

$$s_n = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{-1}{11} \right)^k = \frac{1}{11} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \dots - \left(\frac{-1}{11} \right)^n = \frac{1}{11} \left(\frac{1 - \left(\frac{-1}{11} \right)^n}{1 - \left(\frac{-1}{11} \right)} \right), \forall n \in \mathbb{N}$$

- Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{11} \left(1 - \left(-\frac{1}{11} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{12} \left(1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^n \right) = -\frac{1}{12}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{11^k} = \frac{1}{12}$$

Serie geométrica

La convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$ se da cuando
do $|x| < 1$

Resolución.

Considerando las sumas parciales para $x \neq 0, 1$, tenemos que

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, si $x \in \langle -1; 1 \rangle$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - (x)^{n+1}}{1 - x} \right) = \frac{1}{1 - x}$$

$$\therefore |x| < 1$$

En caso $x \notin \langle -1; 1 \rangle$, la serie diverge.

Apreciaciones.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Consecuencias de la serie geométrica.

Para todo $x \in \langle -1; 1 \rangle$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

Ejercicio 267

Halle la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$

Ejercicio 268

Halle la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2k^2 + 2k + 4}$

Aritmética de las series

Teorema. Dadas las series convergentes

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k ,$$

las cuales convergen a L y M , respectivamente. Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \pm b_k) = L \pm M$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda a_k = \lambda L, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo. Determine el valor de convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^{k+1} + 8^k}{9^{k+2}}$$

Resolución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^{k+1} + 8^k}{9^{k+2}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7}{81} \left(\frac{7}{9} \right)^k + \frac{1}{81} \left(\frac{8}{9} \right)^k \right) \\ &= \frac{7}{81} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9} \right)^k + \frac{1}{81} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9} \right)^k \\ &= \frac{7}{81} \left(\frac{\left(\frac{7}{9} \right)}{1 - \left(\frac{7}{9} \right)} \right) + \frac{1}{81} \left(\frac{\left(\frac{8}{9} \right)}{1 - \left(\frac{8}{9} \right)} \right) = \frac{7}{81} \left(\frac{7}{2} \right) + \frac{1}{81} (8) = \frac{65}{162} \end{aligned}$$

Algunas Series Notables.

- **Serie exponencial.** Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Si $x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

- **Serie armónica.** Es la siguiente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

La cual diverge a $+\infty$

- **Serie de potencia (Serie p).**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots = \begin{cases} \text{converge,} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge a } +\infty, & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Serie armónica. Es la siguiente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Veamos porque diverge

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots > \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(1 + 1 + \dots) \quad \text{diverge a } +\infty \end{aligned}$$

Ejemplo.

Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-5)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

Resolución.

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-5)^{k+1} \frac{1}{k!} = (-5) \sum_{k=1}^{\infty} (-5)^k \frac{1}{k!} = (-5) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k!} - 1 \right)$$

Como sabemos que la serie exponencial concluimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-5)^{k+1} \frac{1}{k!} = (-5)(e^{-5} - 1) = 5 - \frac{5}{e^5}.$$

Ejemplo. Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 8k + 10}{(k + 4)!}$$

Resolución.

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 8k + 10}{(k + 4)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k + 4)^2 - 6}{(k + 4)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 4}{(k + 3)!} - 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 4)!}$$

Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 4}{(k + 3)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 3}{(k + 3)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 3)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 3)!} = e - \frac{5}{2} + e - \frac{8}{3} = 2e - 31/6$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 4)!} = e - 65/24$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 8k + 10}{(k + 4)!} = (2e - 31/6) - 6 \left(e - \frac{65}{24} \right) = -4e + 133/12$$